Docente: prof. Dino Zardi Esercitatore: ing. Alessio Bertò

SOLUZIONE PROBLEMI

Insegnamento di Fisica dell'Atmosfera

Seconda prova in itinere

a.a. 2002/03

Valori delle costanti

Raggio terrestre medio: a_T = 6370 km

Raggio solare medio: $a_S = 7\ 10^5$ km

Distanza media terra-sole d : 149. 10^6 km

Valore medio dell'accelerazione di gravità al suolo: g = 9.81 m s^{-2}

Frequenza angolare di rotazione terrestre: $\Omega = 7.292\ 10^{-5}\ s^{-1}$

Costante di Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.67\ 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Costante $c_1 = 3.74\ 10^{-16}$ W m^2

Costante $c_2 = 1.44\ 10^{-2}$ mK

Problema 1

1. Il massimo dell'irradianza, alla temperatura T di corpo nero fornita, si realizza in corrispondenza della lunghezza d'onda data dalla legge di Wien

$$\lambda_m = \frac{2897}{T}$$

ossia per $\lambda_m = 7.2425\ \mu$m.

2. La legge di Planck

$$E_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1\right]}$$

è approssimabile dall'espressione fornita nel testo se

$$\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) >> 1 .$$

Per $\lambda = \lambda_m$, $\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_m T}\right) = 114.12 >> 1$,pertanto l'approssimazione considerata è valida per lunghezze d'onda pari o inferiori a λ_m.

3. L'errore commesso nel calcolare E_λ, utilizzando la formula approssimata anziché quella esatta, è pari a

$$\frac{\Delta E_{\lambda_m}}{E_{\lambda m}} = \frac{\left(-\left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_m T}\right)-1\right]^{-1} + \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_m T}\right)\right]^{-1}\right)}{\left(\left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_m T}\right)-1\right]^{-1}\right)} = \text{-0.69\%}.$$

4. Dato che, per $\lambda < \lambda_m$, si commettono errori molto piccoli utilizzando la formula approssimata anziché quella esatta, si può calcolare l'integrale della curva spettrale come

$$\Delta E = \int_0^{\lambda_m} E_\lambda d\lambda = \int_0^{\lambda_m} c_1 \lambda^{-5}\left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)-1\right]^{-1} d\lambda \cong \int_0^{\lambda_m} c_1 \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right) d\lambda .$$

Si può fare il cambio di variabile $\xi = -\frac{c_2}{\lambda T} = -\frac{a}{\lambda}$ e quindi riscrivere l'integrale come

$$\left[a^{-4} c_1 \int_{\xi_m}^{-\infty} \xi^3 (\exp \xi) d\xi\right].$$

Integrando per parti si ottiene l'espressione

$$\Delta E = \left[a^{-4} c_1 (\exp \xi)(\xi^3 - 3\xi^2 + 6\xi - 6)\right]_{\xi_m}^{-\infty} .$$

Sostituendo i valori dei parametri precedentemente calcolati e delle costanti si ottiene ΔE = 359.61 W/m^2.

5. Per calcolare l'irradianza su tutto lo spettro si può applicare la legge di Stefan-Boltzmann

$$E = \sigma T^4$$

ottenendo E = 1451.42 W/m^2. Pertanto il contributo valutato nel punto 4 è $\frac{\Delta E}{E} = \frac{359.61}{1451.42} =$ 24.77% del totale.

Problema 2

1. Si trascura l'assorbimento di radiazione solare da parte dei corpi celesti che si trovano tra la terra ed il sole. In tal caso la conservazione del flusso radiante implica che, in corrispondenza della superficie solare, si ha

$$E_S = \left(\frac{d}{a_S}\right)^2 S = 0.68 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2.$$

Pertanto il flusso di radiazione è pari a

$$\Phi_S = 4\pi (a_S)^2 E_S = 4.183 * 10^{26} \text{ W}.$$

2. Dalla legge di Stefan-Boltzmann

$$E_S = \sigma T_S{}^4$$

si ottiene T_S = 5884 K.

3. Indicando con x il flusso radiante emesso dalla superficie terrestre, con y il flusso radiante emesso dallo strato gassoso (emesso sia verso lo spazio che verso la superficie terrestre) e con E_T il flusso solare netto assorbito dal sistema terra-atmosfera (con $E_T = \frac{S}{4}$), si può impostare il bilancio radiativo al suolo e dello strato gassoso (si veda lo schema di Fig. 6.8 sul Wallace & Hobbs). Si può scrivere

$$\begin{cases} 0.88E_T + y = x \\ 0.3x + y = E_T \end{cases}$$

e si ottiene x = 542.25 Wm^{-2} e y = 212.25 Wm^{-2}. Assumendo che il suolo sia assimilabile ad un corpo nero si può applicare la legge di Stefan-Boltzmann

$$x = \sigma T^4$$

ottenendo T_s = 312.7 K. Per l'atmosfera si deve però tener conto anche del coefficiente di emissione: dalla legge

$$y = \varepsilon \sigma T^4,$$

dove $\varepsilon = a = 0.7$, si ottiene T_{atm} = 270.4 K.

Problema 3

1. Applicando la formula fornita dal testo del problema per il campo di pressione si ottiene p_A = 930.09 hPa. Dalla legge dei gas perfetti si ottiene, trascurando la presenza di vapor acqueo,

$$\rho_A = \frac{p_A}{R_d T_A}$$

e quindi ρ_A = 1.0625 kg m^{-3}.

Le componenti orizzontali del gradiente di pressione nelle direzioni x, y si ricavano derivando analiticamente l'espressione per il campo di pressione fornita nel testo del problema,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_A = -2p_0\left(\dfrac{x_A - x_o}{L^2}\right) \\ \left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)_A = -2p_0\left(\dfrac{y_A - y_o}{L^2}\right) \end{cases}$$

Si ottiene $\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_A$ = -0.00516 Pa m^{-1} e $\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)_A$ = -0.00672 Pa m^{-1}.

Il valore della latitudine nel punto A è pari a

$$\varphi = \frac{y_A}{a_T},$$

ossia φ = 0.873 radianti. Si ricava rapidamente il valore del parametro di Coriolis nel punto A dalla formula

$$f = 2\Omega sen(\varphi)$$

e precisamente f = 0.000112 s^{-1}.

Applicando le equazioni per il vento geostrofico

$$\begin{cases} (u_g)_A = -\dfrac{1}{\rho f}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)_A \\ (v_g)_A = \dfrac{1}{\rho f}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_A \end{cases}$$

si ottiene $(u_g)_A$ = 56.60 m/s e $(v_g)_A$ = - 43.46 m/s. Il modulo del vento geostrofico è

$$|U_G| = \sqrt{u_G^2 + v_G^2} = 71.36 \text{ m/s}.$$

2. Rispetto al sistema di riferimento con l'asse x nella direzione del vento geostrofico si possono scrivere le equazioni per il vento nel mixed layer.

Vale $k_S = \dfrac{C_D}{fh}$ = 0.179 m^{-1}s,per cui si può scrivere

$$\frac{u}{u_G} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4k_S^2 u_G^2}}$$

ottenendo che la velocità nella direzione del vento geostrofico nel mixed layer è pari a u = 5.37 m/s. Dato che vale

$$v = \frac{k_S u^2}{\sqrt{1 - k_S^2 u^2}}$$

si ottiene la velocità trasversale alle curve isobare v = 18.83 m/s, diretta in direzione uscente dal centro dell'alta pressione.

3. Mettendosi nel solito sistema di riferimento, con l'asse x lungo la direzione del vento geostrofico, per lo strato di Ekman si può scrivere

$$\begin{cases} u = u_G\left[1 - e^{-\gamma z}\cos(\gamma z)\right] \\ v = u_G e^{-\gamma z}\sin(\gamma z) \end{cases}$$

dove $\gamma = \left(\dfrac{f}{2k_m}\right)^{1/2}$ e z è la quota del punto considerato. Sostituendo i valori dei vari parametri si ottiene: $\gamma = 3.34 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$, u = 72.71 m/s e v = 13.34 m/s dove v è diretta in direzione uscente dal centro di alta pressione.

4. Indicando con

$$r_A = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = 706.04\,\mathrm{km}$$

la distanza del punto A dal centro dell'alta pressione, si può ricavare il flusso di massa d'aria uscente dalla superficie indicata (nel caso di mixed layer) con la formula $\Phi = \rho v\left[2\pi(r_A)h\right] = 8.871 \cdot 10^{10}$ kg d'aria.

5. Il flusso di massa attraverso la superficie verticale calcolato al punto 3 deve essere compensato da un flusso di massa discendente attraverso l'area che ricopre la superficie circondata dall'isoterma p = p_A . Pertanto si può scrivere

$$v\left[2\pi(r_A)h\right] = w\left[\pi(r_A)^2\right],$$

da cui si deriva $w = \left(\dfrac{2h}{r_A}v\right)$ = 5.33 cm/s verso il basso.

Esercizio 1

1. L'esercizio si risolve calcolando, in primo luogo, la pressione parziale di vapore *e* con la formula

$$e = \frac{q}{q+\varepsilon}p$$

dove $\varepsilon = \dfrac{R_d}{R_W} = 0.622$. Si ottiene e = 8.054 hPa. Si applica ora la formula per la temperatura virtuale

$$T_V = \frac{T}{1 - (1-\varepsilon)\dfrac{e}{p}}$$

ottenendo T_V = 279.84 K.

2. Per avere l'umidità relativa si deve trovare l'umidità specifica a saturazione. Dalla formula di Wexler si ottiene la pressione di vapore a saturazione

$$e_S(T) = 6.112\,\mathrm{exp}\left(\frac{17.67T}{T+243.5}\right) = 9.25hPa\,.$$

Si può quindi ricavare l'umidità specifica a saturazione

$$q_S = \left(\frac{e_S}{p-e_S}\varepsilon\right) = 0.00575\ \mathrm{kg/kg}$$

e, facendo il rapporto, $RH = \dfrac{q}{q_S} = 86.95\%$.

3. La densità del vapore acqueo si ottiene dalla legge dei gas perfetti

$$\rho_V = \frac{e}{R_W T} = 6.255\ 10^{-3}\ \mathrm{kg\ m^{-3}}.$$